به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل چهارم-انتگرال ناسره

تا به حال انتگرال را تنها برای توابع کراندار تعریف کرده‌ایم و علاوه بر این ناحیه انتگرال‌گیری را نیز به بازه‌های کراندار محدود کرده‌ایم. در این کاربرگ می‌خواهیم تعریف انتگرال را به برخی از حالت‌هایی که این شرایط را ندارند نیز گسترش دهیم. این نوع جدید انتگرال، انتگرال ناسره نام دارد. انتگرال‌های ناسره دو نوع هستند؛ یکی انتگرال‌هایی که دامنه انتگرال‌گیری آنها بی‌کران است و دیگری اینکه دامنه انتگرال‌گیری کران‌دار است اما خود تابع بی‌کران. برای هر کدام از دو نوع مثال‌هایی می‌آوریم.

تعریف ۱ (انتگرال ناسره (نوع اول)). $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید به ازای هر عدد حقیقی مانند A، $A>a$، f روی $[a,A]$ انتگرال‌پذیر باشد و $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f$ وجود داشته باشد. در این صورت می‌گوییم $\int_a^\infty f$ همگراست و قرار می‌دهیم

$$\int_a^\infty f=\lim_{A\to\infty}\int_a^A f.$$

فعالیت ۱.

الف) فرض کنید عدد مثبت p داده شده است. همگرایی $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ را بررسی کنید.

ب) فرض کنید α عددی مثبت باشد. همگرایی $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ را بررسی کنید.

ج) فرض کنید که $p>1$. نشان دهید که $\int_0^\infty e^{-x^p}dx$ همگرا است.

راهنمایی: (آزمون مقایسه) فرض کنید توابع نامنفی f و g روی $[a,\infty[$ داده شده‌اند که هر یک روی هر بازه $[a,A]$ انتگرال‌پذیر است و فرض کنید $K>a$ ای وجود دارد که به ازای هر x که $x>K$، $f(x)\le g(x)$. در این صورت

الف) اگر $\int_a^\infty g$ همگرا باشد، $\inf_a^\infty f$ نیز همگراست.

ب) اگر $\int_a^\infty f$ واگرا باشد، $\int_a^\infty g$ نیز واگراست.

تعریف ۲ (انتگرال ناسره (نوع دوم))**.** برای تابع $f \ :]a,b] \to \mathbb{R}$ که $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ؛ اگر به ازای هر عدد مثبت مانند ϵ که $a+\epsilon < b$، f روی $[a+\epsilon, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، می‌گوییم $\int_a^b f$ همگراست در صورتی که $\lim_{\epsilon\to ۰^+} \int_{a+\epsilon}^b f$ وجود داشته باشد، و در این صورت قرار می‌دهیم

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon\to ۰^+} \int_{a+\epsilon}^b f.$$

فعالیت ۲.

الف) فرض کنید عدد مثبت p داده شده باشد، همگرایی $\int_۰^۱ \frac{۱}{x^p}dx$ را بررسی کنید.

ب) همگرایی $\int_۱^۲ \frac{x^۲}{\sqrt{x^۵-۱}}dx$ را بررسی کنید.

ج) همگرایی $\int_{-۱}^{+۱} \frac{۱}{x}dx$ را بررسی کنید.

گاهی هر دو نوع ناسرگی در انتگرال ظاهر می‌شود که باید هر نوع را به طور جداگانه بررسی کنیم.

فعالیت ۳. همگرایی $\int_۰^\infty \frac{۱}{\sqrt{x^۳+x}}dx$ را بررسی کنید.

فعالیت ۴ (تابع گاما)**.** تعریف می‌کنیم

$$\Gamma(x) = \int_۰^\infty t^{x-۱}e^{-t}dt.$$

الف) نشان دهید که $\Gamma(x)$ برای $x \in]۰,\infty[$ تعریف می‌شود.

ب) $\Gamma(۱)$ را محاسبه کنید.

ج) با استفاده از انتگرال جزء به جزء، نشان دهید $\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$.

د) برای هر عدد طبیعی n، نشان دهید $\Gamma(n+۱) = n!$.